SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE VERACRUZ
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR Y SUPERIOR
DIRECCIÓN GENERAL DE TELEBACHILLERATO

OCTAVA OLIMPIADA DE LA CIENCIA **FASE REGIONAL 2012**
MATEMÁTICAS **HOJA DE CLAVES DE RESPUESTA**

1. Entre el segundo y el tercer cuadro la suma es 90, así que el cuarto cuadro tiene el número 110; esto nos dice que los últimos dos cuadros suman 240 y lo que falta para 300 es 60. Por lo que la respuesta es 60.
2. Los triángulos inferiores de la estrella tienen un vértice común y entonces el ángulo en ese vértice es igual. Llamemos α a ese ángulo. El otro ángulo en el triángulo izquierdo mide $180° - 100° = 80°$; el otro ángulo en el triángulo de la derecha mide $180° - 93° = 87°$. Fijándonos en las sumas de los ángulos de los triángulos inferiores de la estrella, tenemos que $x + \alpha + 87° = 58° + 80° + \alpha$, de donde $x = 51°$
3. Llamemos s a la suma de las columnas. El número que falta en la tercer columna es $s - 4$ y la suma de cada renglón es igual a $2 + 4 + (s - 4) + 2 = s + 4$. El número que falta en la segunda columna es $s - 4 - 3 = s - 7$. Si x es el número que estamos buscando, la suma del último renglón es $6 + (s - 7) + 1 + x = x + s$; como las sumas de todos los renglones son iguales, $x + s = s + 4$, de donde $x = 4$.

   Solución alternativa: La suma de todos los cuadros se puede obtener como la de las 4 columnas o la de los 3 renglones; de esta manera tenemos que la suma de las columnas es múltiplo de 3 y la de los renglones es múltiplo de 4. Entonces el único número que puede ir en el cuadro en blanco del primer renglón es el 8. Aquí ya tenemos que la suma de los números en cualquier columna es 12. De aquí ya es fácil completar la figura y queda como sigue:

2	4	**8**	2
4	3	3	**6**
6	**5**	1	**4**

4. Sea a la longitud de los pedazos que tienen a los extremos originales de la cuerda y l la longitud de un octavo de la cuerda. Tenemos que la cuerda quedó dividida en segmentos de longitud $a, 2a$ y $2(l - a)$. Las combinaciones posibles son $a = 4$ y $2(l - a) = 9$, $a = 9$ y $2(l - a) = 4$, $2a = 4$ y $2(l - a) = 9$, $2a = 9$ y $2(l - a) = 4$, de donde obtenemos las longitudes 68, 88, 52 y 52, respectivamente. Por lo que la opción que no puede haber sido la longitud original de la cuerda es c) 72 m.
5. Observemos primero que las inscripciones (1), (2) y (3) son falsas ya que:
   - Si (1) es cierta, el oro estaría en el cofre 1 implicando que (1) es falsa.
   - Si (2) es cierta, el oro estaría en el cofre 2 implicando que (1) es cierta.
   - Si (3) es cierta, el oro está en el cofre 3 y (1) sería cierta.

   Por lo tanto, el oro está en el cofre 4 o 5.
   Si el oro está en el cofre 4, entonces (1), (2), (3) y (5) son falsas, y por lo tanto, el níquel está en cofre 3, el bronce en el 1, la plata en el 2 y el platino en el 5.

Si el oro está en el cofre 5, entonces (1), (2), (3) y (4) son falsas, y por lo tanto, el bronce está en el cofre 1, el platino en el 2, el níquel en el 3 y la plata en el 4.
Por lo tanto, el níquel está en el cofre número 3.

6. Tenemos que,

$$p(1) + p(2) + \dots + p(9) = 1+2+\dots+9 = 45,$$
$$p(10)+p(11)+\dots+p(19) = 1+45 = 46,$$
$$p(20)+p(21)+\dots+p(29) = 2(1+45) = 2(46),$$
$$\vdots$$
$$p(90)+p(91)+\dots+p(99) = 9(1+45) = 9(46).$$

Por lo tanto,

$$p(1)+p(2)+\dots+p(99) = 45+46(1+2+\dots+9) = 45+46(45) = 45(47) = 2115.$$

Solución alternativa. Consideremos a todos los números desde el 0 hasta el 99 como si tuvieran 2 dígitos, es decir, considerando a los números de un dígito como $0x$. Tenemos que la suma de los productos de sus dígitos incluyendo los ceros es,

$$0\cdot0+0\cdot1+0\cdot2+\dots+9\cdot9-0\cdot0 = (0+1+2+\dots+9)^2-0 = 45^2.$$

Ahora, si en lugar de los ceros colocamos unos, el producto de los dígitos distintos de 0 se mantiene, es decir, calcular $p(1)+p(2)+\dots+p(99)$ es equivalente a sustituir en la igualdad anterior los ceros por unos, por lo que,

$$\begin{aligned} p(1)+p(2)+\dots+p(99) &= 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot2+\dots+9\cdot9-1\cdot1 \\ &= (1+1+2+\dots+9)^2-1 \\ &= 46^2-1 = 2115. \end{aligned}$$